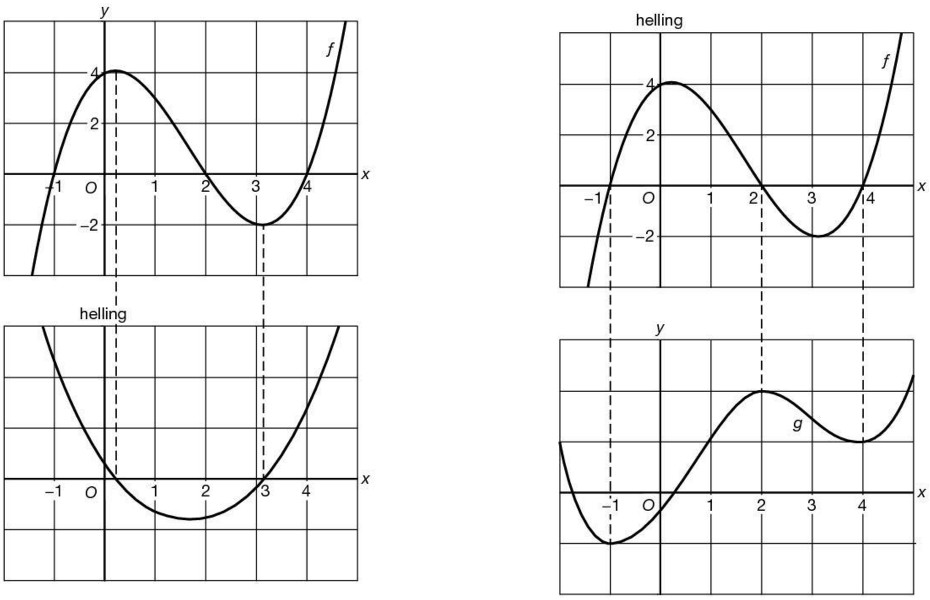
13 Toepassingen van de differentiaalrekening

13

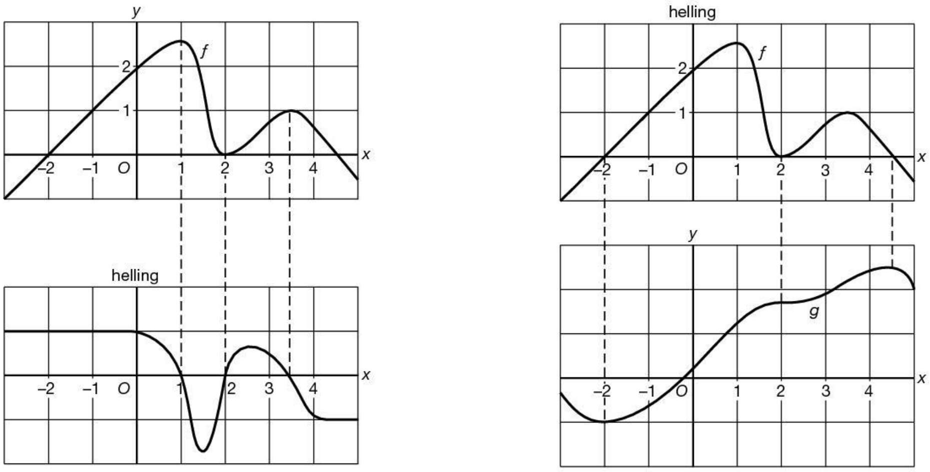
Voorkennis Hellinggrafieken en snelheden

Bladzijde 55

1 **a,b**



2 **a,b**



Bladzijde 57

3 **a** $x = 2$ geeft $2{,}3 \cdot 2^3 - 5{,}1 \cdot 2^2 - 6{,}8 \cdot 2 - 12 = -27{,}6$

$x = 4$ geeft $y = 2{,}3 \cdot 4^3 - 5{,}1 \cdot 4^2 - 6{,}8 \cdot 4 - 12 = 26{,}4$

De gemiddelde snelheid is $\dfrac{26{,}4 - -27{,}6}{4 - 2} = 27.$

b $y = 2{,}3x^3 - 5{,}1x^2 - 6{,}8x - 12$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = 6{,}9x^2 - 10{,}2x - 6{,}8$

De snelheid is $\dfrac{dy}{dx} = 6{,}9 \cdot (-3)^2 - 10{,}2 \cdot -3 - 6{,}8 = 85{,}9.$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $x = -2$ geeft $y = 2{,}3 \cdot (-2)^3 - 5{,}1 \cdot (-2)^2 - 6{,}8 \cdot -2 - 12 = -37{,}2$
$x = 1$ geeft $y = 2{,}3 \cdot 1^3 - 5{,}1 \cdot 1^2 - 6{,}8 \cdot 1 - 12 = -21{,}6$
De helling van de lijn AB is $\frac{-21{,}6 - -37{,}2}{1 - -2} = 5{,}2$.

d De helling in B is $\frac{dy}{dx} = 6{,}9 \cdot 1^2 - 10{,}2 \cdot 1 - 6{,}8 = -10{,}1$.

e $x = 2$ geeft $\frac{dy}{dx} = 6{,}9 \cdot 2^2 - 10{,}2 \cdot 2 - 6{,}8 = 0{,}4$
$\frac{dy}{dx} > 0$, dus y neemt toe voor $x = 2$.

f De richtingscoëfficiënt is $\frac{dy}{dx} = 6{,}9 \cdot (-1)^2 - 10{,}2 \cdot -1 - 6{,}8 = 10{,}3$.

4 **a** $q = 8$ geeft $K = 1{,}8 \cdot 8^{1{,}5} - 2 \cdot 8^{0{,}6} + 25 = 58{,}76...$
$q = 12$ geeft $K = 1{,}8 \cdot 12^{1{,}5} - 2 \cdot 12^{0{,}6} + 25 = 90{,}94...$
De gemiddelde snelheid waarmee K toeneemt is $\frac{90{,}94... - 58{,}76...}{12 - 8} \approx 8{,}04$ euro per stuk.

b $K = 1{,}8q^{1{,}5} - 2q^{0{,}6} + 25$ geeft $\frac{dK}{dq} = 2{,}7q^{0{,}5} - 1{,}2q^{-0{,}4}$
De snelheid waarmee K verandert is $\frac{dK}{dq} = 2{,}7 \cdot 15^{0{,}5} - 1{,}2 \cdot 15^{-0{,}4} \approx 10{,}05$ euro per stuk.

c $q = 8{,}2$ geeft $\frac{dK}{dq} = 2{,}7 \cdot 8{,}2^{0{,}5} - 1{,}2 \cdot 8{,}2^{-0{,}4} \approx 7{,}2$
$\frac{dK}{dq} > 0$, dus K neemt toe voor $q = 8{,}2$.

13.1 Berekeningen met de afgeleide

Bladzijde 58

1 Voor het differentiëren van $f(x)$ heb je de kettingregel nodig, voor $g(x)$ de productregel en voor $h(x)$ de quotiëntregel.

Bladzijde 59

2 **a** $y = x^2 + \frac{2}{x^2} = x^2 + 2x^{-2}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x - 4x^{-3} = 2x - \frac{4}{x^3}$

b $y = \frac{x^2}{x^2 + 2}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+2) \cdot 2x - x^2 \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^3 + 4x - 2x^3}{(x^2+2)^2} = \frac{4x}{(x^2+2)^2}$

c $y = e^{2x+1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = e^{2x+1} \cdot 2 = 2e^{2x+1}$

d $y = x^2 \cdot e^x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = 2xe^x + x^2e^x$

e $y = x^2 + \ln(x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{x}$

f $y = \frac{x}{1 + \ln(x)}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \ln(x)) \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{x}}{(1 + \ln(x))^2} = \frac{1 + \ln(x) - 1}{(1 + \ln(x))^2} = \frac{\ln(x)}{(1 + \ln(x))^2}$

g $y = x^3 + 3^x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3^x \cdot \ln(3)$

h $y = 100 \cdot {}^2\log(x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 100 \cdot \frac{1}{x\ln(2)} = \frac{100}{x\ln(2)}$

3 **a** $N(t) = \frac{200}{1 + 40e^{-0{,}2t}}$ geeft $N'(t) = \frac{(1 + 40e^{-0{,}2t}) \cdot 0 - 200 \cdot 40e^{-0{,}2t} \cdot -0{,}2}{(1 + 40e^{-0{,}2t})^2} = \frac{1600e^{-0{,}2t}}{(1 + 40e^{-0{,}2t})^2}$

b $R(q) = q^{0{,}2} \cdot \ln(q + 1)$ geeft $R'(q) = 0{,}2q^{-0{,}8} \cdot \ln(q + 1) + q^{0{,}2} \cdot \frac{1}{q+1} = 0{,}2q^{-0{,}8} \cdot \ln(q + 1) + \frac{q^{0{,}2}}{q+1}$

c $F(p) = 5{,}56p^{-0{,}3} + 1{,}25^p$ geeft $F'(p) = -1{,}668p^{-1{,}3} + 1{,}25^p \cdot \ln(1{,}25)$

d $G(n) = 2 \cdot 10^6 \cdot (n^{0{,}5} + n^{-0{,}6})$ geeft $G'(n) = 2 \cdot 10^6 \cdot (0{,}5n^{-0{,}5} - 0{,}6n^{-1{,}6})$

4 **a** $N(t) = 150(1 - e^{-0{,}05t})$ geeft $N'(t) = 150 \cdot -e^{-0{,}05t} \cdot -0{,}05 = 7{,}5e^{-0{,}05t}$

b De snelheid is $N'(5) = 7{,}5e^{-0{,}05 \cdot 5} \approx 5{,}84$.

Bladzijde 60

5 **a** $P'(5) = 14 \cdot 5 - 7{,}2 \cdot 5^{1{,}4} \approx -1{,}39$

$P'(5) < 0$, dus de grafiek van P daalt voor $t = 5$.

b Los op $14t - 7{,}2t^{1{,}4} = 0$.

Voer in $y_1 = 14x - 7{,}2x^{1{,}4}$ en $y_2 = 5$.

Intersect geeft $x \approx 0{,}62$ en $x \approx 4{,}23$.

Dus voor $t = 0{,}62$ en $t = 4{,}23$ is de snelheid waarmee P toeneemt gelijk aan 5.

6 **a** $N(t) = \dfrac{50t}{10t^2 + 53}$ geeft $N'(t) = \dfrac{(10t^2 + 53) \cdot 50 - 50t \cdot 20t}{(10t^2 + 53)^2} = \dfrac{500t^2 + 2650 - 1000t^2}{(10t^2 + 53)^2} = \dfrac{-500t^2 + 2650}{(10t^2 + 53)^2}$

De snelheid is $N'(2) = \dfrac{-500 \cdot 2^2 + 2650}{(10 \cdot 2^2 + 53)^2} \approx 0{,}075$.

b $N'(3) = \dfrac{-500 \cdot 3^2 + 2650}{(10 \cdot 3^2 + 53)^2} \approx -0{,}09$

$N'(3) < 0$, dus de grafiek van N daalt voor $t = 3$.

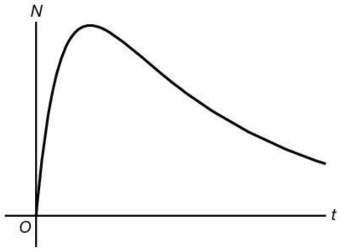
c Los op $\dfrac{-500t^2 + 2650}{(10t^2 + 53)^2} = -0{,}1$.

Voer in $y_1 = \dfrac{-500x^2 + 2650}{(10x^2 + 53)^2}$ en $y_2 = -0{,}1$.

Intersect geeft $x \approx 3{,}15$ en $x \approx 5{,}43$.

Dus voor $t = 3{,}15$ en $t = 5{,}43$ is $N'(t) = -0{,}1$.

7 **a** Voer in $y_1 = 500(e^{-0{,}15x} - e^{-x})$.



b $N = 500(e^{-0{,}15t} - e^{-t})$ geeft $\dfrac{dN}{dt} = 500(e^{-0{,}15t} \cdot -0{,}15 - e^{-t} \cdot -1) = 500(-0{,}15e^{-0{,}15t} + e^{-t})$

De snelheid is $\dfrac{dN}{dt} = 500(-0{,}15e^{-0{,}15 \cdot 1{,}5} + e^{-1{,}5}) \approx 52$.

c $t = 2{,}5$ geeft $\dfrac{dN}{dt} = 500(-0{,}15e^{-0{,}15 \cdot 2{,}5} + e^{-2{,}5}) \approx -10{,}5$

$\dfrac{dN}{dt} < 0$, dus de grafiek van N daalt voor $t = 2{,}5$.

d Los op $500(-0{,}15e^{-0{,}15t} + e^{-t}) = -25$.

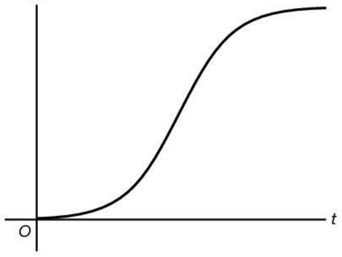
Voer in $y_1 = 500(-0{,}15e^{-0{,}15x} + e^{-x})$ en $y_2 = -25$.

Intersect geeft $x = 3{,}127...$ en $x = 7{,}227...$

Dus na 3 uur en $0{,}127... \cdot 60 \approx 8$ minuten en na 7 uur en $0{,}227... \cdot 60 \approx 14$ minuten is de snelheid waarmee N afneemt 25 per uur.

Bladzijde 61

8 **a** Voer in $y_1 = \dfrac{1050}{1 + 200e^{-0{,}2x}}$.



© Noordhoff Uitgevers bv

b $N(t) = \dfrac{1050}{1 + 200e^{-0,2t}}$ geeft $N'(t) = \dfrac{(1 + 200e^{-0,2t}) \cdot 0 - 1050 \cdot 200e^{-0,2t} \cdot -0,2}{(1 + 200e^{-0,2t})^2} = \dfrac{42\,000e^{-0,2t}}{(1 + 200e^{-0,2t})^2}$

Bij 20 mei om 12 uur hoort $t = 19\frac{1}{2}$.

De snelheid is $N'\left(19\frac{1}{2}\right) = \dfrac{42\,000e^{-0,2 \cdot 19\frac{1}{2}}}{\left(1 + 200e^{-0,2 \cdot 19\frac{1}{2}}\right)^2} \approx 33,4$ fruitvliegjes per dag.

c $N(0) = \dfrac{1050}{1 + 200e^{-0,2 \cdot 0}} \approx 5$ en $N(21) = \dfrac{1050}{1 + 200e^{-0,2 \cdot 21}} \approx 263$.

Er zijn $263 - 5 = 258$ fruitvliegjes bij gekomen.

d $g_{3\text{ weken}} = \dfrac{263}{5}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\dfrac{263}{5}\right)^{\frac{1}{21}} \approx 1,21$

e Los op $\dfrac{42\,000e^{-0,2t}}{(1 + 200e^{-0,2t})^2} = 30$.

Voer in $y_1 = \dfrac{42\,000e^{-0,2x}}{(1 + 200e^{-0,2x})^2}$ en $y_2 = 30$.

Intersect geeft $x \approx 18,7$ en $x \approx 34,3$.

Dat is dus op 19 mei en 4 juni.

9 **a** $N(t) = \dfrac{200t}{t^2 + 16}$ geeft $N'(t) = \dfrac{(t^2 + 16) \cdot 200 - 200t \cdot 2t}{(t^2 + 16)^2} = \dfrac{200t^2 + 3200 - 400t^2}{(t^2 + 16)^2} = \dfrac{3200 - 200t^2}{(t^2 + 16)^2}$

b $N'(t) = 0$ geeft $3200 - 200t^2 = 0$

$200t^2 = 3200$

$t^2 = 16$

$t = 4$

Voor t is 4 is de snelheid waarmee N verandert gelijk aan 0. De grafiek van N heeft een top voor $t = 4$.

Bladzijde 62

10 $N_{max} = 165,4$, dus de helft van de maximale waarde is 82,7.

Los op $350(e^{-0,2t} - e^{-0,8t}) = 82,7$.

Voer in $y_1 = 350(e^{-0,2x} - e^{-0,8x})$ en $y_2 = 82,7$.

Intersect geeft $x = 7,158...$, dus na 7 uur en $0,158... \cdot 60 \approx 10$ minuten is N afgenomen tot de helft van de maximale waarde.

Bladzijde 63

11 **a** $N = 1500 \cdot \log(2t + 4) - 50t$ geeft

$N'(t) = 1500 \cdot \dfrac{1}{(2t + 4)\ln(10)} \cdot 2 - 50 = \dfrac{3000}{(2t + 4)\ln(10)} - 50 = \dfrac{1302,88...}{2t + 4} - 50 \approx \dfrac{651}{t + 2} - 50$

Dus $a = 651$.

b $N'(t) = 0$ geeft $\dfrac{651}{t + 2} - 50 = 0$

$\dfrac{651}{t + 2} = 50$

$t + 2 = \dfrac{651}{50} = 13,02$

$t = 11,02$

Dus na ongeveer 11 dagen is N maximaal.

c $N'(t) = 100$ geeft $\dfrac{651}{t + 2} - 50 = 100$

$\dfrac{651}{t + 2} = 150$

$t + 2 = \dfrac{651}{150} = 4,34$

$t = 2,34$

Dus voor $t = 2,34$ is de snelheid waarmee N toeneemt gelijk aan 100 per dag.

d Het maximum van N is $N(11{,}02) = 1500 \cdot \log(2 \cdot 11{,}02 + 4) - 50 \cdot 11{,}02 \approx 1572$.
$0{,}9 \cdot 1572 \approx 1415$
Los op $N(t) = 1415$.
Voer in $y_1 = 1500 \cdot \log(2x + 4) - 50x$ en $y_2 = 1415$.
Intersect geeft $x = 3{,}93...$ en $x = 22{,}29...$
$22{,}29... - 3{,}93... \approx 18$, dus N is ongeveer 18 dagen groter dan 1415.

12 **a** $H = \dfrac{a \cdot \ln(2t+1)}{2t+1}$ geeft $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \dfrac{(2t+1) \cdot a \cdot \frac{1}{2t+1} \cdot 2 - a \cdot \ln(2t+1) \cdot 2}{(2t+1)^2} = \dfrac{2a - 2a \cdot \ln(2t+1)}{(2t+1)^2} = \dfrac{2a(1 - \ln(2t+1))}{(2t+1)^2}$

b $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$ geeft $2a(1 - \ln(2t+1)) = 0$
$2a = 0 \vee 1 - \ln(2t+1) = 0$
$a = 0 \vee \ln(2t+1) = 1$
v.n. $2t + 1 = \mathrm{e}$
$2t = \mathrm{e} - 1$
$t = \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2} = 0{,}859...$ uur

Dus na $0{,}859... \cdot 60 \approx 52$ minuten is de hoeveelheid afvalwater die per uur wegstroomt maximaal.

c $H(0{,}859...) = 10\,000$ geeft $\dfrac{a \cdot \ln(2 \cdot 0{,}859... + 1)}{2 \cdot 0{,}859... + 1} = 10\,000$
$\dfrac{a \cdot 1}{2{,}718...} = 10\,000$
$a = \dfrac{10\,000}{2{,}718...} \approx 27\,183$

Dus $a = 27\,183$.

d $\left[\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right]_{t=2} = \dfrac{2 \cdot 27183(1 - \ln(2 \cdot 2 + 1))}{(2 \cdot 2 + 1)^2} \approx -1325$

13 **a** $P = \dfrac{100(t^2 - t + 1)}{t^2 + 1}$ geeft
$P'(t) = \dfrac{(t^2+1) \cdot 100(2t - 1) - 100(t^2 - t + 1) \cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \dfrac{200t^3 - 100t^2 + 200t - 100 - 200t^3 + 200t^2 - 200t}{(t^2+1)^2} = \dfrac{100t^2 - 100}{(t^2+1)^2}$

$P'(1{,}5) = \dfrac{100 \cdot 1{,}5^2 - 100}{(1{,}5^2 + 1)^2} \approx 11{,}8$

Het zuurstofgehalte in de vijver neemt na anderhalve week toe met 11,8% per week.

b $P'(t) = 0$ geeft $100t^2 - 100 = 0$
$100t^2 = 100$
$t^2 = 1$
$t = 1$

Dus na 1 week, ofwel 7 dagen, is het zuurstofgehalte minimaal.

c Los op $\dfrac{100(t^2 - t + 1)}{t^2 + 1} = 85$.
Voer in $y_1 = \dfrac{100(x^2 - x + 1)}{x^2 + 1}$ en $y_2 = 85$.
Intersect geeft $x = 15$.
Dus na $15 \cdot 7 = 105$ dagen is het zuurstofniveau voor 85% hersteld.

d Los op $\dfrac{100t^2 - 100}{(t^2 + 1)^2} > 10$.
Voer in $y_1 = \dfrac{100x^2 - 100}{(x^2 + 1)^2}$ en $y_2 = 10$.
Intersect geeft $x = 1{,}328...$ en $x = 2{,}497...$
$2{,}497... - 1{,}328... = 1{,}169...$ weken ≈ 8 dagen
Dus de snelheid is ongeveer 8 dagen meer dan 10% per week.

© Noordhoff Uitgevers bv

e $P'(7) = \dfrac{100 \cdot 7^2 - 100}{(7^2+1)^2} = 1{,}92$

$P(7) = \dfrac{100(7^2 - 7 + 1)}{7^2 + 1} = 86$

Er moet nog 14% bij met een snelheid van 1,92% per week. Het duurt dus nog $\dfrac{14}{1{,}92} = 7{,}291$ weken ≈ 51 dagen tot het oorspronkelijke zuurstofniveau weer bereikt wordt.
In totaal duurt het dus 49 + 51 = 100 dagen vanaf het dumpen van het afval.

13.2 Redeneren met de afgeleide

Bladzijde 65

14 **a** $y = 50 - \dfrac{10}{2x+3}$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = 0 - \dfrac{(2x+3) \cdot 0 - 10 \cdot 2}{(2x+3)^2} = \dfrac{20}{(2x+3)^2}$

b De teller 20 is positief en de noemer $(2x+3)^2$ is ook positief. Dus $\dfrac{20}{(2x+3)^2}$ is positief.

Dus $\dfrac{dy}{dx} > 0$ voor $x \geq 0$.

c $\dfrac{dy}{dx}$ is de helling van de grafiek van y. Als geldt dat $\dfrac{dy}{dx} > 0$ voor $x \geq 0$ dan is de helling van de grafiek van y dus positief voor $x \geq 0$. Een positieve helling betekent dat de grafiek van y stijgend is voor $x \geq 0$.

Bladzijde 66

15 **a** $y = 5 + \dfrac{12}{2x+1}$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2x+1) \cdot 0 - 12 \cdot 2}{(2x+1)^2} = \dfrac{-24}{(2x+1)^2}$

De teller −24 is negatief en de noemer $(2x+1)^2$ is positief voor $x \geq 0$, dus $\dfrac{dy}{dx}$ is negatief.

De grafiek van y is dus dalend.

b Als x toeneemt, dan neemt $2x + 1$ toe, dus neemt $\dfrac{12}{2x+1}$ af, dus neemt $5 + \dfrac{12}{2x+1}$ af.

16 **a** $N = \dfrac{200t}{50-t}$ geeft $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{(50-t) \cdot 200 - 200t \cdot -1}{(50-t)^2} = \dfrac{10\,000 - 200t + 200t}{(50-t)^2} = \dfrac{10\,000}{(50-t)^2}$

De teller 10 000 is positief en de noemer $(50-t)^2$ is positief voor $0 < t < 50$, dus $\dfrac{dN}{dt}$ is positief.

De grafiek van N is dus stijgend.

b Als t toeneemt van 0 tot 50, dan neemt $50 - t$ af en neemt $200t$ toe, dus neemt $\dfrac{200t}{50-t}$ toe.

De grafiek van N is dus stijgend.

17 **a** $F = 0{,}1q + \ln(50q + 100)$ geeft $F'(q) = 0{,}1 + \dfrac{1}{50q+100} \cdot 50 = 0{,}1 + \dfrac{1}{q+2}$

De teller 1 is positief en de noemer $q + 2$ is positief voor $q \geq 0$, dus $F'(q)$ is positief voor $q \geq 0$.
De grafiek van F is dus stijgend.

b $F'(5) = 0{,}1 + \dfrac{1}{5+2} = 0{,}242...$

$F'(10) = 0{,}1 + \dfrac{1}{10+2} = 0{,}183...$

$\dfrac{0{,}183... - 0{,}242...}{0{,}242...} \times 100\% \approx -24{,}5\%$

De snelheid neemt dan dus met 24,5% af.

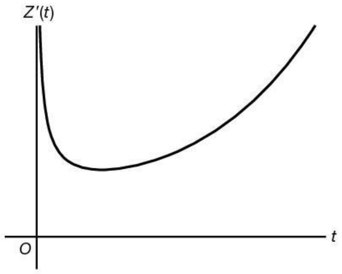
18 **a** $Z = 100\left(e^{0{,}1t} + t^{0{,}4}\right)$ geeft $Z'(t) = 100(e^{0{,}1t} \cdot 0{,}1 + 0{,}4t^{-0{,}6}) = 10e^{0{,}1t} + 40t^{-0{,}6} = 10e^{0{,}1t} + \dfrac{40}{t^{0{,}6}}$

$10e^{0{,}1t}$ is positief voor $t \geq 0$ en $\dfrac{40}{t^{0{,}6}}$ is positief voor $t \geq 0$, dus $Z'(t)$ is positief voor $t \geq 0$.

De grafiek van Z is dus stijgend.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Voer in $y_1 = 10e^{0,1x} + \dfrac{40}{x^{0,6}}$.



De optie minimum geeft $x \approx 5,2$ en $y \approx 31,7$.
De minimale snelheid is 31,7.

19 **a** Als $P = 100$, dan wordt de noemer 0 en delen door 0 kan niet. Het is dus niet mogelijk om 100% van de verontreiniging te verwijderen.

b $P = 90$ geeft $B = \dfrac{60\,000 \cdot 90}{100 - 90} = 540\,000$

$P = 95$ geeft $B = \dfrac{60\,000 \cdot 95}{100 - 95} = 1\,140\,000$

Het is dus $\dfrac{1\,140\,000 - 540\,000}{540\,000} \times 100\% \approx 111,1\%$ duurder.

c $B = \dfrac{60000p}{100 - p}$ geeft $\dfrac{dB}{dp} = \dfrac{(100 - p) \cdot 60\,000 - 60\,000p \cdot -1}{(100 - p)^2} = \dfrac{6\,000\,000 - 60\,000p + 60\,000p}{(100 - p)^2} = \dfrac{6\,000\,000}{(100 - p)^2}$

De teller 6 000 000 is positief en de noemer $(100 - p)^2$ is ook positief voor $0 < p < 100$, dus $\dfrac{dB}{dp}$ is positief voor $0 < p < 100$. De grafiek van B is dus stijgend. Hoe meer je van de chemische stof verwijdert, des te hoger zijn dus de kosten.

d $B = 1\,000\,000$ geeft $\dfrac{60\,000p}{100 - p} = 1\,000\,000$

$60\,000p = 100\,000\,000 - 1\,000\,000p$

$1\,060\,000p = 100\,000\,000$

$p \approx 94,3$

Er blijft dus nog ongeveer 5,7% van de chemische stof aanwezig.

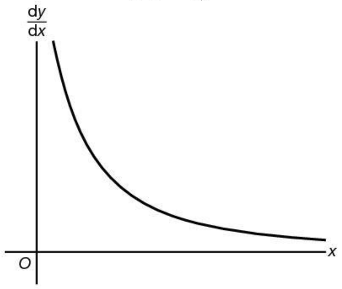
e Er geldt $q = 100 - p$ en dus $p = 100 - q$.

Dat geeft $B = \dfrac{60\,000(100 - q)}{100 - (100 - q)} = \dfrac{-60\,000q + 6\,000\,000}{q} = -60\,000 + \dfrac{6\,000\,000}{q}$.

Dus $a = -60\,000$ en $b = 6\,000\,000$.

Bladzijde 67

20 **a** Voer in $y_1 = \dfrac{20}{(2x + 3)^2}$.



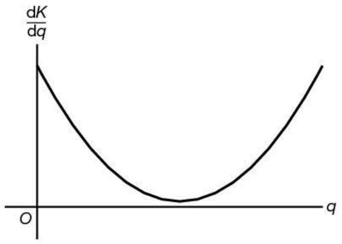
b Omdat de grafiek van $\dfrac{dy}{dx}$ geheel boven de x-as ligt voor elke $x \geq 0$, is de grafiek van y stijgend voor elke $x \geq 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 68

21 $0{,}7^x > 0$ is positief voor $x \geq 0$ en omdat $\ln(0{,}7) \approx -0{,}36$ is $0{,}7x \cdot \ln(0{,}37)$ negatief voor $x \geq 0$.
Ook $0{,}32x^2$ is positief voor $x \geq 0$, dus $0{,}7^x \cdot \ln(0{,}37) - 0{,}32x^2$ is negatief voor $x \geq 0$.
Dus $\frac{dE}{dx} < 0$ voor elke $x \geq 0$.

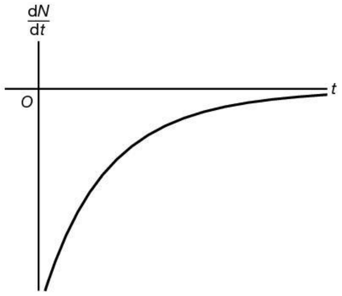
22 **a** $K = \frac{1}{3}q^3 - 5q^2 + 26q + 100$ geeft $\frac{dK}{dq} = q^2 - 10q + 26$
Voer in $y_1 = x^2 - 10x + 26$.



De grafiek van $\frac{dK}{dq}$ ligt geheel boven de q-as, dus de grafiek van K is stijgend.

b De optie minimum geeft $x = 5$.
De grafiek stijgt het minst voor $q = 5$.

23 **a** $N = 100(0{,}9^t + 0{,}8^t)$ geeft $\frac{dN}{dt} = 100(0{,}9^t \cdot \ln(0{,}9) + 0{,}8^t \cdot \ln(0{,}8))$
Voer in $y_1 = 100(0{,}9^x \cdot \ln(0{,}9) + 0{,}8^x \cdot \ln(0{,}8))$.



De grafiek van $\frac{dN}{dt}$ ligt geheel onder de t-as, dus de grafiek van N is dalend.

b $t = 1$ geeft $\frac{dN}{dt} = 100(0{,}9^1 \cdot \ln(0{,}9) + 0{,}8^1 \cdot \ln(0{,}8)) = -27{,}33...$
$\frac{1}{2} \cdot -27{,}33... = -13{,}66...$, dus los op $\frac{dN}{dt} = -13{,}66...$
Voer in $y_2 = -13{,}66...$
Intersect geeft $x \approx 4{,}94$, dus voor $t = 4{,}94$ is de snelheid de helft van de snelheid op $t = 1$.

24 **a** $t = 0$ en $N = 0{,}1$ geeft $\frac{5}{1 + be^{c \cdot 0}} = 0{,}1$

$$\frac{5}{1 + b} = 0{,}1$$

$$b + 1 = \frac{5}{0{,}1} = 50$$

$$b = 49$$

Dus $b = 49$.

b $t = 10$ en $N = 1{,}9$ geeft $\frac{5}{1 + 49e^{c \cdot 10}} = 1{,}9$
Voer in $y_1 = \frac{5}{1 + 49e^{x \cdot 10}}$ en $y_2 = 1{,}9$.
Intersect geeft $x \approx -0{,}34$.
Dus $c = -0{,}34$.

c Los op $\frac{5}{1 + 49e^{-0,34t}} = 1$.

Voer in $y_1 = \frac{5}{1 + 49e^{-0,34x}}$ en $y_2 = 1$.

Intersect geeft $x \approx 7,4$.

Dus in 2012 waren er voor het eerst meer dan 1 miljoen ritten.

d $N = \frac{5}{1 + 49e^{-0,34t}}$ geeft $\frac{dN}{dt} = \frac{(1 + 49e^{-0,34t}) \cdot 0 - 5 \cdot 49e^{-0,34t} \cdot -0,34}{(1 + 49e^{-0,34t})^2} = \frac{83,3e^{-0,34t}}{(1 + 49e^{-0,34t})^2}$

De teller $83,3e^{-0,34t}$ is positief en de noemer $(1 + 49e^{-0,34t})^2$ is positief, dus $\frac{dN}{dt}$ is positief.

De grafiek van N is dus stijgend.

e Als t toeneemt, dan neemt $e^{-0,34t}$ af en dus neemt $1 + 49e^{-0,34t}$ af en dus neemt $\frac{5}{1 + 49e^{-0,34t}}$ toe.

De grafiek van N is dus stijgend.

13.3 De afgeleide en soorten van stijgen en dalen

Bladzijde 70

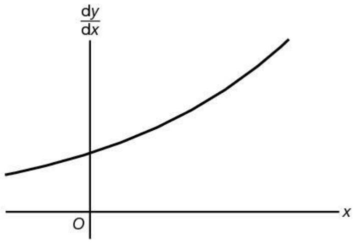
25 **a** toenemende stijging

b De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x-as, dus de grafiek van y is stijgend.

c Omdat $\frac{dy}{dx}$ stijgend is neemt de helling van y dus voortdurend toe. De grafiek van y is dus toenemend stijgend.

Bladzijde 72

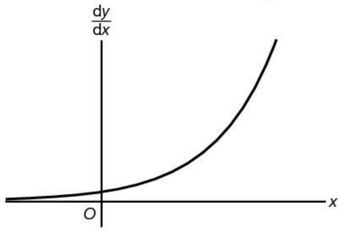
26 **a** $y = 100(1 + e^{0,1x})$ geeft $\frac{dy}{dx} = 100 \cdot e^{0,1x} \cdot 0,1 = 10e^{0,1x}$



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x-as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

b $y = 0,05(1 + 4e^{0,5x})$ geeft $\frac{dy}{dx} = 0,05 \cdot 4e^{0,5x} \cdot 0,5 = 0,1e^{0,5x}$

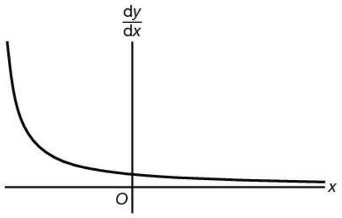


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x-as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

© Noordhoff Uitgevers bv

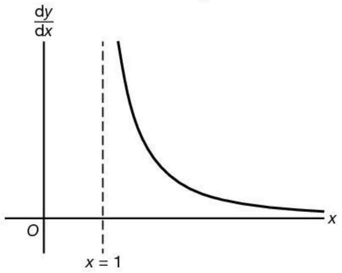
c $y = \ln(2x + 15)$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x + 15} \cdot 2 = \frac{2}{2x + 15}$



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x-as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is afnemend stijgend.

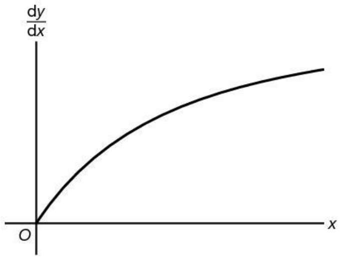
d $y = \frac{30 - 10x}{1 - x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - x) \cdot -10 - (30 - 10x) \cdot -1}{(1 - x)^2} = \frac{10x - 10 + 30 - 10x}{(1 - x)^2} = \frac{20}{(1 - x)^2}$



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x-as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is afnemend stijgend.

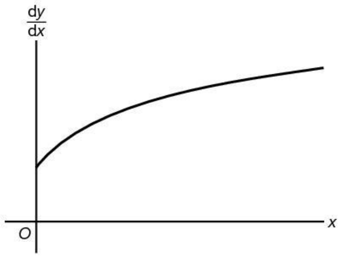
e $y = \frac{x^2}{x + 4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(x + 4) \cdot 2x - x^2 \cdot 1}{(x + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8x - x^2}{(x + 4)^2} = \frac{x^2 + 8x}{(x + 4)^2}$



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt voor $x > 0$ geheel boven de x-as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

f $y = x \cdot \ln(x + 4)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \ln(x + 4) + x \cdot \frac{1}{x + 4} = \ln(x + 4) + \frac{x}{x + 4}$



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x-as, dus de grafiek van y is stijgend.

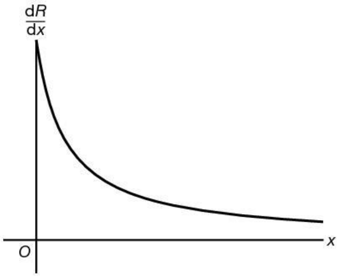
De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

27 **a** $x = 4{,}5$ geeft $R = 150 - \dfrac{50}{1 + 4{,}5} = 140{,}90...$

$x = 6{,}5$ geeft $R = 150 - \dfrac{50}{1 + 6{,}5} = 143{,}33...$

De procentuele toename is $\dfrac{143{,}33... - 140{,}90...}{140{,}90...} \times 100\% \approx 1{,}7\%$.

b $R = 150 - \dfrac{50}{1 + x}$ geeft $\dfrac{dR}{dx} = 0 - \dfrac{(1 + x) \cdot 0 - 50 \cdot 1}{(1 + x)^2} = \dfrac{50}{(1 + x)^2}$



De grafiek van $\dfrac{dR}{dx}$ ligt geheel boven de x-as, dus de grafiek van R is stijgend.

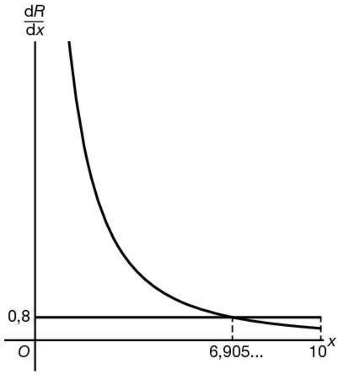
De grafiek van $\dfrac{dR}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van R is afnemend stijgend.

c Als x toeneemt, dan neemt $1 + x$ toe en dan neemt $\dfrac{50}{1 + x}$ af, dus dan neemt $150 - \dfrac{50}{1 + x}$ toe. De grafiek van R is dus stijgend.

d Los op $\dfrac{50}{(1 + x)^2} < 0{,}8$.

Voer in $y_1 = \dfrac{50}{(1 + x)^2}$ en $y_2 = 0{,}8$.

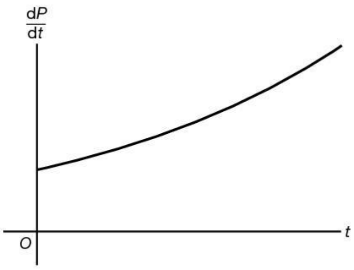
Intersect geeft $x = 6{,}905...$, dus de snelheid is minder dan 0,8 voor $6{,}91 \leq x \leq 10$.



28 **a** $t = 0$ geeft $P = 2{,}35(1 + e^{0{,}0275 \cdot 0}) = 2{,}35$
$t = 35$ geeft $P = 2{,}35(1 + e^{0{,}0275 \cdot 35}) = 8{,}50...$

De procentuele toename is $\dfrac{8{,}50... - 2{,}35}{2{,}35} \times 100\% \approx 262\%$.

b $P = 2{,}35(1 + e^{0{,}0275t})$ geeft $\dfrac{dP}{dt} = 2{,}35 \cdot e^{0{,}0275t} \cdot 0{,}0275 = 0{,}0064625e^{0{,}0275t}$



De grafiek van $\dfrac{dP}{dt}$ ligt geheel boven de t-as, dus de grafiek van P is stijgend.

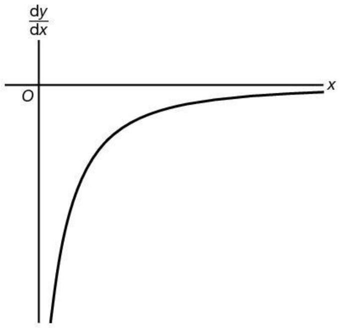
De grafiek van $\dfrac{dP}{dt}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van P is toenemend stijgend.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $N = b \cdot g^t$ met $b = 6{,}0$ en $g_{17\text{ jaar}} = \dfrac{7{,}4}{6{,}0}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\dfrac{7{,}4}{6{,}0}\right)^{\frac{1}{17}} \approx 1{,}012$.
Dus $N = 6{,}0 \cdot 1{,}012^t$ met t in jaren en $t = 0$ halverwege 1999.
$t = 5{,}5$ geeft $N = 6{,}0 \cdot 1{,}012^{5{,}5} = 6{,}406...$ miljard aardbewoners in januari 2005.
In januari 2005 leed $P = 2{,}35(1 + e^{0{,}0275 \cdot 25}) \approx 7{,}0\%$ van de bevolking aan diabetes.
Dat waren dus $0{,}070 \cdot 6{,}406... \approx 0{,}448$ miljard mensen met diabetes.
$t = 15{,}5$ geeft $N = 6{,}0 \cdot 1{,}012^{15{,}5} = 7{,}218...$ miljard aardbewoners in januari 2015.
In januari 2015 leed $P = 2{,}35(1 + e^{0{,}0275 \cdot 35}) \approx 8{,}5\%$ van de bevolking aan diabetes.
Dat waren dus $0{,}085 \cdot 7{,}218... \approx 0{,}614$ miljard mensen met diabetes.
De procentuele toename is dus $\dfrac{0{,}614 - 0{,}448}{0{,}448} \times 100\% \approx 37{,}1\%$.

Bladzijde 73

29 **a** $y = \dfrac{x + 11}{x + 1}$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x + 1) \cdot 1 - (x + 11) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \dfrac{x + 1 - x - 11}{(x + 1)^2} = \dfrac{-10}{(x + 1)^2}$

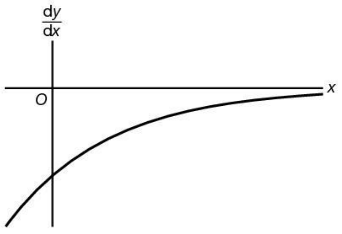


b Omdat de grafiek van $\dfrac{dy}{dx}$ geheel onder de x-as ligt is de grafiek van y dalend.

c Omdat de grafiek van $\dfrac{dy}{dx}$ bovendien stijgend is, worden de hellingen steeds groter.
De grafiek van y is dus afnemend dalend.

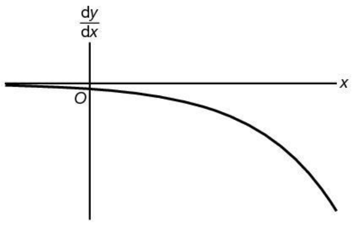
Bladzijde 74

30 **a** $y = 100e^{-0{,}1x}$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = 100 \cdot e^{-0{,}1x} \cdot -0{,}1 = -10e^{-0{,}1x}$



De grafiek van $\dfrac{dy}{dx}$ ligt geheel onder de x-as, dus de grafiek van y is dalend.
De grafiek van $\dfrac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is afnemend dalend.

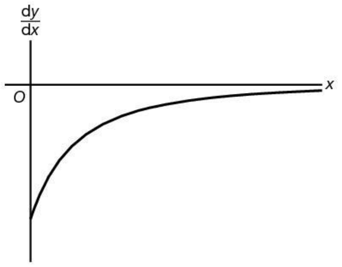
b $y = 30 + 20(1 - e^{0{,}3x})$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = 20 \cdot -e^{0{,}3x} \cdot 0{,}3 = -6e^{0{,}3x}$



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel onder de x-as, dus de grafiek van y is dalend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is toenemend dalend.

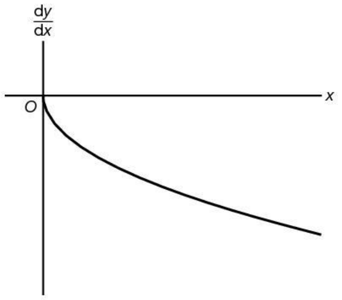
c $y = \frac{10x + 20}{x + 1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(x + 1) \cdot 10 - (10x + 20) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{10x + 10 - 10x - 20}{(x + 1)^2} = \frac{-10}{(x + 1)^2}$



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel onder de x-as, dus de grafiek van y is dalend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is afnemend dalend.

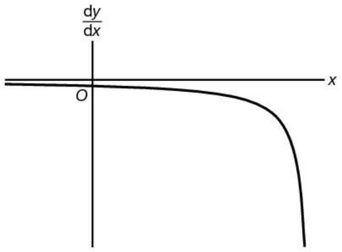
d $y = 5 - x\sqrt{x} = 5 - x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = -1\frac{1}{2}\sqrt{x}$



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt onder de x-as, dus de grafiek van y is dalend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is toenemend dalend.

e $y = \ln(20 - 3x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{20 - 3x} \cdot -3 = \frac{-3}{20 - 3x}$

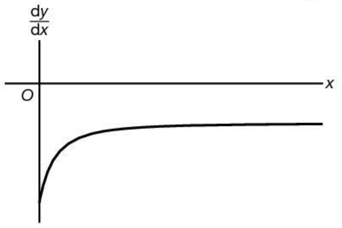


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel onder de x-as, dus de grafiek van y is dalend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is toenemend dalend.

 © Noordhoff Uitgevers bv

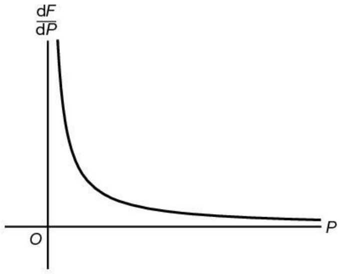
f $y = \frac{3 - x^2}{x + 1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(x + 1) \cdot -2x - (3 - x^2) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 3 + x^2}{(x + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x + 1)^2}$



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel onder de x-as, dus de grafiek van y is dalend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is afnemend dalend.

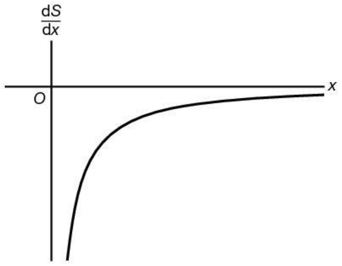
31 **a** $F = 5 \cdot \log(P) + 6$ geeft $\frac{dF}{dP} = 5 \cdot \frac{1}{P \cdot \ln(10)} = \frac{5}{P \cdot \ln(10)}$



De grafiek van $\frac{dF}{dP}$ ligt geheel boven de P-as, dus de grafiek van F is stijgend.

De grafiek van $\frac{dF}{dP}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van F is afnemend stijgend.

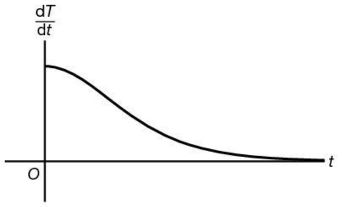
b $S = \frac{20}{1 + x^{0,5}}$ geeft $\frac{dS}{dx} = \frac{(1 + x^{0,5}) \cdot 0 - 20 \cdot 0,5x^{-0,5}}{(1 + x^{0,5})^2} = \frac{-10x^{-0,5}}{(1 + x^{0,5})^2}$



De grafiek van $\frac{dS}{dx}$ ligt geheel onder de x-as, dus de grafiek van S is dalend.

De grafiek van $\frac{dS}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van S is afnemend dalend.

c $T = \frac{20}{1 + 0,5^t}$ geeft $\frac{dT}{dt} = \frac{(1 + 0,5^t) \cdot 0 - 20 \cdot 0,5^t \cdot \ln(0,5)}{(1 + 0,5^t)^2} = \frac{-20\ln(0,5) \cdot 0,5^t}{(1 + 0,5^t)^2}$

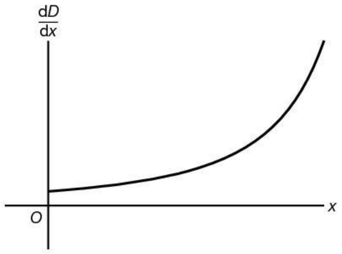


De grafiek van $\frac{dT}{dt}$ ligt geheel boven de t-as, dus de grafiek van T is stijgend.

De grafiek van $\frac{dT}{dt}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van T is afnemend stijgend.

13

d $D = \dfrac{x + 200}{20 - x}$ geeft $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(20 - x) \cdot 1 - (x + 200) \cdot -1}{(20 - x)^2} = \dfrac{20 - x + x + 200}{(20 - x)^2} = \dfrac{220}{(20 - x)^2}$



De grafiek van $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}$ ligt geheel boven de x-as, dus de grafiek van D is stijgend.

De grafiek van $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van D is toenemend stijgend.

32 **a** gemiddelde snelheid $= \dfrac{42{,}195}{4\frac{59}{60}} = 8{,}46...$ km/uur $\approx 2{,}35$ m/s

b 18 km/uur = 5 m/s

$L = 30$ en $v = 5$ geeft $a(2 \cdot 30^{0{,}7} - 1{,}25 \cdot 30^{0{,}8}) = 5$

$$a = \frac{5}{2 \cdot 30^{0{,}7} - 1{,}25 \cdot 30^{0{,}8}} \approx 1{,}898$$

Dus $a = 1{,}898$.

c $v = 1{,}90(2 \cdot 80^{0{,}7} - 1{,}25 \cdot 80^{0{,}8}) = 2{,}555...$ m/s

Zijn eindtijd is $\dfrac{42\,195}{2{,}555..} \approx 16\,510$ seconden ≈ 4 uur en 35 minuten.

d $v = 2{,}35$ en $L = 81$ geeft $a(2 \cdot 81^{0{,}7} - 1{,}25 \cdot 81^{0{,}8}) = 2{,}35$

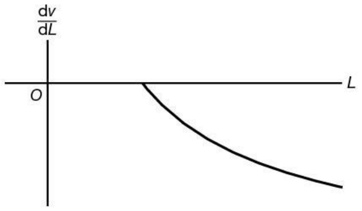
$$a = \frac{2{,}35}{2 \cdot 81^{0{,}7} - 1{,}25 \cdot 81^{0{,}8}} \approx 1{,}80$$

$L = 40$ en $a = 1{,}80$ geeft $v = 1{,}80(2 \cdot 40^{0{,}7} - 1{,}25 \cdot 40^{0{,}8}) = 4{,}579...$ m/s

Zijn eindtijd zou zijn $\dfrac{42\,195}{4{,}579...} \approx 9214$ seconden ≈ 2 uur en 34 minuten.

e $v = a(2L^{0{,}7} - 1{,}25L^{0{,}8})$ geeft $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}L} = a(1{,}4L^{-0{,}3} - L^{-0{,}2})$

Kies bijvoorbeeld $a = 1{,}90$ en voer in $y_1 = 1{,}90(1{,}4x^{-0{,}3} - x^{-0{,}2})$.



De grafiek van $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}L}$ ligt onder de L-as, dus de grafiek van v is dalend.

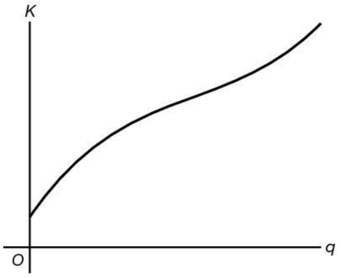
De grafiek van $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}L}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van v is toenemend dalend.

De snelheid waarmee de snelheid afneemt wordt dus steeds groter.

© Noordhoff Uitgevers bv

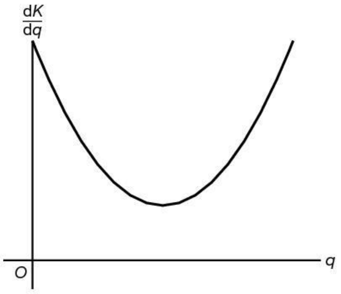
Bladzijde 75

33 **a** Voer in $y_1 = 0{,}0001x^3 - 0{,}03x^2 + 4x + 50$.



b $K = 0{,}0001q^3 - 0{,}03q^2 + 4q + 50$ geeft $\frac{dK}{dq} = 0{,}0003q^2 - 0{,}06q + 4$

Voer in $y_1 = 0{,}0003x^2 - 0{,}06x + 4$.



c De grafiek van $\frac{dK}{dq}$ ligt geheel boven de q-as. De grafiek van K is dus stijgend. De kosten stijgen dus als q toeneemt.

d De optie minimum geeft $x = 100$.

Voor $q < 100$ is de grafiek van $\frac{dK}{dq}$ dalend. De grafiek van K is dan dus afnemend stijgend.

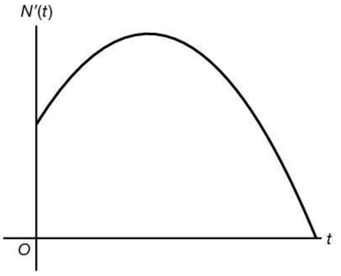
Voor $q > 100$ is de grafiek van $\frac{dK}{dq}$ stijgend. De grafiek van K is dan dus toenemend stijgend.

Bladzijde 76

34 Eerst ligt de grafiek van N' boven de t-as en is dalend. De grafiek van N is dan afnemend stijgend. Vervolgens ligt de grafiek van N' onder de t-as en is dalend. De grafiek van N is dan toenemend dalend. Tenslotte ligt de grafiek van N' onder de t-as en is stijgend. De grafiek van N is dan afnemend dalend.

35 **a** $N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$ geeft $N'(t) = -3t^2 + 12t + 15$

Voer in $y_1 = -3x^2 + 12x + 15$.



De optie maximum geeft $x = 2$ en $y = 27$. De snelheid is dus maximaal na 2 uur.

b $N'(0) = -3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 15 = 15$

Los op $N'(t) = 15$ en voer in $y_2 = 15$.

Intersect geeft $x = 4$, dus na 4 uur mag een werknemer pauzeren.

Bladzijde 77

36 **a** $q = 500$ geeft $K = 10^{-6} \cdot 500^3 - 3 \cdot 10^{-3} \cdot 500^2 + 5 \cdot 500 + 1000 = 2875$

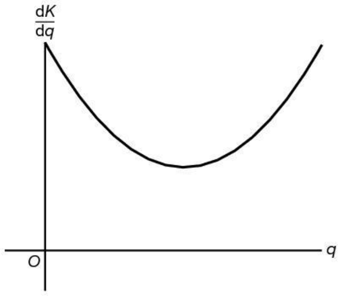
$q = 600$ geeft $K = 10^{-6} \cdot 600^3 - 3 \cdot 10^{-3} \cdot 600^2 + 5 \cdot 600 + 1000 = 3136$

De gemiddelde toename van de kosten is $\frac{3136 - 2875}{600 - 500} = 2{,}61$ euro per stuk.

b $q = 1200$ geeft $K = 10^{-6} \cdot 1200^3 - 3 \cdot 10^{-3} \cdot 1200^2 + 5 \cdot 1200 + 1000 = 4408$
De gemiddelde kosten zijn dan $\frac{4408}{1200} \approx 3{,}67$ euro per stuk.

c $K = 10^{-6} \cdot q^3 - 3 \cdot 10^{-3} \cdot q^2 + 5q + 1000$ geeft $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}q} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot q^2 - 6 \cdot 10^{-3} \cdot q + 5$
$q = 1500$ geeft $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}q} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 1500^2 - 6 \cdot 10^{-3} \cdot 1500 + 5 = 2{,}75$
De kosten nemen dus toe met 2,75 euro per stuk.

d Voer in $y_1 = 3 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 - 6 \cdot 10^{-3} \cdot x + 5$.

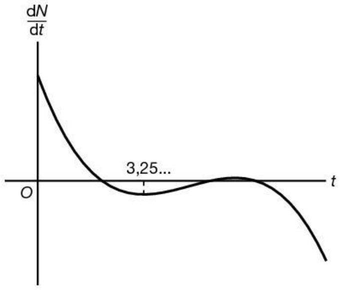


De optie minimum geeft $x \approx 1000$ en $y = 2$.
De minimale snelheid waarmee de kosten toenemen is 2 euro per stuk.

37 **a** Voer in $y_1 = -0{,}5x^4 + 9{,}3x^3 - 59x^2 + 140x + 22$.
De optie maximum geeft $x \approx 2{,}0$ en $y \approx 132$ en $x \approx 6{,}7$ en $y \approx 101$.
Op tijdstip t_A zijn er $132 - 101 = 31$ klanten meer dan op tijdstip t_B.

b De optie minimum geeft $x = 5{,}24...$
Dat is 5 uur en 14 minuten na 8:00 uur, dus om 13:14 uur treedt het minimum bij t_C op.

c $N = -0{,}5t^4 + 9{,}3t^3 - 59t^2 + 140t + 22$ geeft $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -2t^3 + 27{,}9t^2 - 118t + 140$
Voer in $y_1 = -2x^3 + 27{,}9x^2 - 118x + 140$.



De optie minimum geeft $x = 3{,}25...$
Dus 3 uur en 15 minuten na 8:00 uur, dus om 11:15 uur is de daling het sterkst.

38 **a** $t = 0$ en $N = 200$ geeft $\frac{3000}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{c \cdot 0}} = 200$

$$\frac{3000}{1 + b} = 200$$
$$1 + b = \frac{3000}{200} = 15$$
$$b = 14$$

$t = 18$ en $N = 1875$ geeft $\frac{3000}{1 + 14 \cdot \mathrm{e}^{c \cdot 18}} = 1875$

$$1 + 14\mathrm{e}^{18c} = \frac{3000}{1875} = 1{,}6$$
$$14\mathrm{e}^{18c} = 0{,}6$$
$$\mathrm{e}^{18c} = \frac{0{,}6}{14} = 0{,}0428...$$
$$18c = \ln(0{,}042...) = -3{,}1498...$$
$$c \approx -0{,}175$$

Dus $b = 14$ en $c = -0{,}175$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $t = 20$ geeft $N = \dfrac{3000}{1 + 14e^{-0,175 \cdot 20}} \approx 2109$

$t = 30$ geeft $N = \dfrac{3000}{1 + 14e^{-0,175 \cdot 30}} \approx 2795$

Er zijn dus $2795 - 2109 = 686$ lepelaars bij gekomen.

c Als t heel groot is, is $e^{-0,175t} \approx 0$, dus is $14e^{-0,175t} \approx 0$ en dus is $N \approx \dfrac{3000}{1+0} = 3000$.

De grenswaarde is 3000 en $0,95 \cdot 3000 = 2850$.

Los op $\dfrac{3000}{1 + 14e^{-0,175t}} = 2850$.

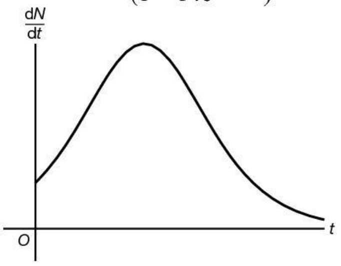
Voer in $y_1 = \dfrac{3000}{1 + 14e^{-0,175x}}$ en $y_2 = 2850$.

Intersect geeft $x \approx 31,9$.

Dus in het jaar 2011 verschilt het aantal lepelaars voor het eerst minder dan 5% van de grenswaarde.

d $N = \dfrac{3000}{1 + 14e^{-0,175t}}$ geeft $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{(1 + 14e^{-0,175t}) \cdot 0 - 3000 \cdot 14e^{-0,175t} \cdot -0,175}{(1 + 14e^{-0,175t})^2} = \dfrac{7350e^{-0,175t}}{(1 + 14e^{-0,175t})^2}$

Voer in $y_1 = \dfrac{7350e^{-0,175x}}{(1 + 14e^{-0,175x})^2}$.



De optie maximum geeft $x \approx 15,1$ en $y = 131,25$.

Dus de toename van het aantal lepelaars was het grootst in 1995.

13.4 Optimaliseren

Bladzijde 79

39 **a** lengte omheining $= x + x + 10 + y + y + 6 = 2x + 2y + 16$
lengte omheining $= 120$

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 16 &= 120 \\ 2y &= 104 - 2x \\ y &= 52 - x \end{aligned}$$

b $O =$ lengte × breedte $= (x + 10)(y + 6)$
$y = 52 - x$

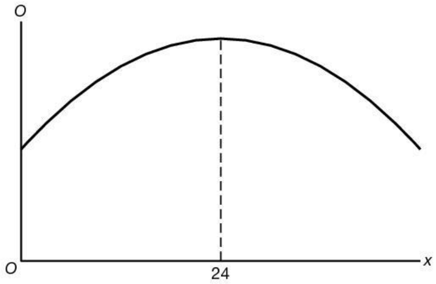
$$\begin{aligned} O &= (x + 10)(58 - x) \\ O &= 58x - x^2 + 580 - 10x \\ O &= -x^2 + 48x + 580 \end{aligned}$$

c $O = -x^2 + 48x + 580$ geeft $\dfrac{dO}{dx} = -2x + 48$

$\dfrac{dO}{dx} = 0$ geeft $-2x + 48 = 0$

$-2x = -48$

$x = 24$



Uit de schets blijkt dat de oppervlakte maximaal is als $x = 24$.

d De maximale oppervlakte is $O_{max} = -24^2 + 48 \cdot 24 + 580 = 1156 \text{ m}^2$.

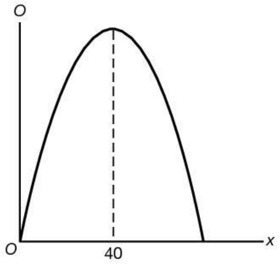
Bladzijde 80

40 $O = -4{,}8x^2 + 384x$ geeft $\frac{dO}{dx} = -9{,}6x + 384$

$\frac{dO}{dx} = 0$ geeft $-9{,}6x + 384 = 0$

$-9{,}6x = -384$

$x = 40$



Uit de schets blijkt dat de oppervlakte maximaal is als $x = 40$.
Dus $AD = 2x = 80$ m en $AB = 2y = 2(-1{,}2 \cdot 40 + 96) = 96$ m.

41 **a** lengte omheining $= x + x + 14 + y + y + 6 = 2x + 2y + 20$ } $2x + 2y + 20 = 200$
lengte omheining $= 200$

$2x + 2y = 180$

$x + y = 90$

$y = -x + 90$

b O = lengte × breedte $= (x + 14)(y + 6)$ } $O = (x + 14)(-x + 96)$
$y = -x + 90$

$O = -x^2 + 96x - 14x + 1344$

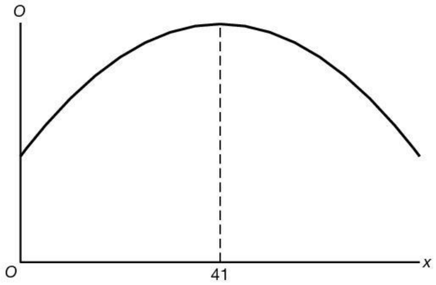
$O = -x^2 + 82x + 1344$

c $O = -x^2 + 82x + 1344$ geeft $\frac{dO}{dx} = -2x + 82$

$\frac{dO}{dx} = 0$ geeft $-2x + 82 = 0$

$-2x = -82$

$x = 41$



Uit de schets blijkt dat de oppervlakte maximaal is als $x = 41$.
Dus $AB = 41 + 14 = 55$ m.
$x = 41$ geeft $y = -41 + 90 = 49$, dus $AD = 49 + 6 = 55$ m.

42 **a** lengte omheining $= x + x + 6 + y = 2x + y + 6$ } $2x + y + 6 = 200$
lengte omheining $= 200$

$y = -2x + 194$

b O = lengte × breedte $= y \cdot (x + 6)$ } $O = (-2x + 194)(x + 6)$
$y = -2x + 194$

$O = -2x^2 - 12x + 194x + 1164$

$O = -2x^2 + 182x + 1164$

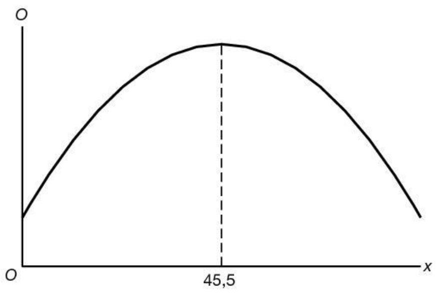
c $O = -2x^2 + 182x + 1164$ geeft $\frac{dO}{dx} = -4x + 182$

$\frac{dO}{dx} = 0$ geeft $-4x + 182 = 0$

$-4x = -182$

$x = 45{,}5$

 © Noordhoff Uitgevers bv



Uit de schets blijkt dat de oppervlakte maximaal is als $x = 45{,}5$.
De maximale oppervlakte is $O_{max} = -2 \cdot 45{,}5^2 + 182 \cdot 45{,}5 + 1164 = 5304{,}5$ m².

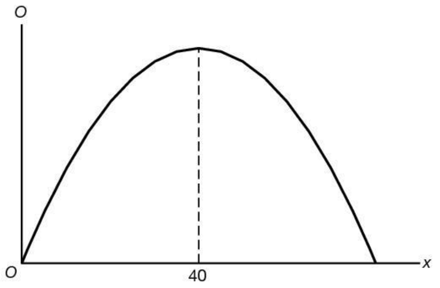
43 **a** lengte hekwerk $= 4 \cdot 3x + 2 \cdot 3y + 2y = 12x + 6y + 2y = 12x + 8y$
lengte hekwerk $= 960$

$$\left.\begin{array}{l} \text{lengte hekwerk} = 12x + 8y \\ \text{lengte hekwerk} = 960 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 12x + 8y = 960 \\ 8y = -12x + 960 \\ y = -1\tfrac{1}{2}x + 120 \end{array}$$

b $\left.\begin{array}{l} O = \text{lengte} \times \text{breedte} = 3y \cdot 3x = 9xy \\ y = -1\tfrac{1}{2}x + 120 \end{array}\right\} \begin{array}{l} O = 9x\left(-1\tfrac{1}{2}x + 120\right) \\ O = -13\tfrac{1}{2}x^2 + 1080x \end{array}$

c $O = -13\tfrac{1}{2}x^2 + 1080x$ geeft $\dfrac{dO}{dx} = -27x + 1080$

$\dfrac{dO}{dx} = 0$ geeft $-27x + 1080 = 0$
$-27x = -1080$
$x = 40$



Uit de schets blijkt dat de oppervlakte maximaal is als $x = 40$.
De maximale oppervlakte is $O_{max} = -13\tfrac{1}{2} \cdot 40^2 + 1080 \cdot 40 = 21\,600$ m².
$x = 40$ geeft $y = -1\tfrac{1}{2} \cdot 40 + 120 = 60$
De lengte is $3 \cdot 60 = 180$ m en de breedte is $3 \cdot 40 = 120$ m.

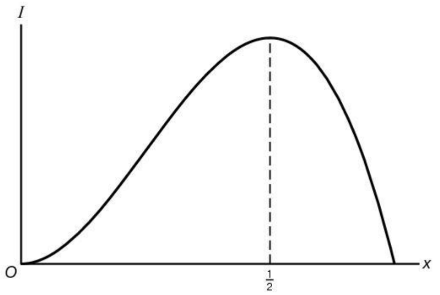
Bladzijde 81

44 **a** $\left.\begin{array}{l} \text{lengte ribben} = 4 \cdot 2x + 4 \cdot x + 4 \cdot h = 12x + 4h \\ \text{lengte ribben} = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 12x + 4h = 9 \\ 4h = 9 - 12x \\ h = 2\tfrac{1}{4} - 3x \end{array}$

b $\left.\begin{array}{l} I = 2x \cdot x \cdot h \\ h = 2\tfrac{1}{4} - 3x \end{array}\right\} \begin{array}{l} I = 2x^2\left(2\tfrac{1}{4} - 3x\right) \\ I = 4\tfrac{1}{2}x^2 - 6x^3 \end{array}$

c $I = 4\tfrac{1}{2}x^2 - 6x^3$ geeft $\dfrac{dI}{dx} = 9x - 18x^2$

$\dfrac{dI}{dx} = 0$ geeft $9x - 18x^2 = 0$
$x(9 - 18x) = 0$
$x = 0 \vee 9 - 18x = 0$
$x = 0 \vee -18x = -9$
$x = 0 \vee x = \tfrac{1}{2}$



Uit de schets blijkt dat de inhoud maximaal is voor $x = \frac{1}{2}$.

Bladzijde 82

45 **a** $I = (x + 3) \cdot x \cdot h = (x^2 + 3x) \cdot h$

lengte $= 2 \cdot (x + 3) + 2x + 4h = 2x + 6 + 2x + 4h = 4x + 4h + 6$

$\left.\begin{array}{l}\text{lengte} = 4x + 4h + 6\\ \text{lengte} = 26\end{array}\right\}\begin{array}{l}4x + 4h + 6 = 26\\ 4h = -4x + 20\\ h = -x + 5\end{array}$

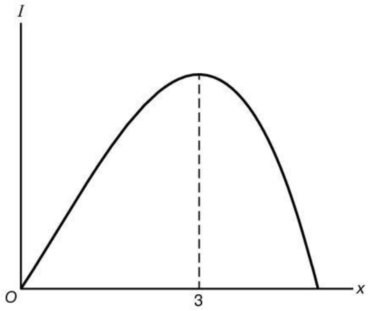
$I = (x^2 + 3x) \cdot (-x + 5)$

$I = -x^3 + 5x^2 - 3x^2 + 15x$

$I = -x^3 + 2x^2 + 15x$

b $I = -x^3 + 2x^2 + 15x$ geeft $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = -3x^2 + 4x + 15$

$x = 3$ geeft $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = -3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 15 = 0$



Uit de schets blijkt dat de inhoud maximaal is voor $x = 3$.

De maximale inhoud is $I_{\text{max}} = -3^3 + 2 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 = 36$ dm^3.

Bladzijde 83

46 **a** $I = x^2h$

$\left.\begin{array}{l}\text{lengte} = 8x + 4h\\ \text{lengte} = 12\end{array}\right\}\begin{array}{l}8x + 4h = 12\\ 4h = -8x + 12\\ h = -2x + 2\end{array}$

$I = x^2 \cdot (-2x + 3)$

$I = -2x^3 + 3x^2$

$I = -2x^3 + 3x^2$ geeft $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = -6x^2 + 6x$

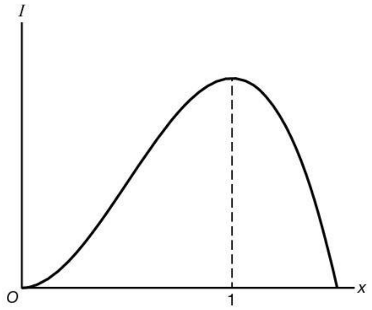
$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = 0$ geeft $-6x^2 + 6x = 0$

$x(-6x + 6) = 0$

$x = 0 \vee -6x + 6 = 0$

$x = 0 \vee x = 1$

 © Noordhoff Uitgevers bv



Uit de schets blijkt dat de inhoud maximaal is voor $x = 1$.
$x = 1$ geeft $h = -2 \cdot 1 + 3 = 1$
De afmetingen zijn 1 bij 1 bij 1 meter.

b Er geldt nu $8x + 4h = a$

$$4h = -8x + a$$
$$\left.\begin{array}{l} h = -2x + \frac{1}{4}a \\ I = x^2h \end{array}\right\} I = x^2\left(-2x + \tfrac{1}{4}a\right)$$
$$I = -2x^3 + \tfrac{1}{4}ax^2$$

c $I = -2x^3 + \frac{1}{4}ax^2$ geeft $\dfrac{dI}{dx} = -6x^2 + \frac{1}{2}ax$

$\dfrac{dI}{dx} = 0$ geeft $-6x^2 + \frac{1}{2}ax = 0$

$$x(-6x + \tfrac{1}{2}a) = 0$$
$$x = 0 \vee -6x + \tfrac{1}{2}a = 0$$
$$x = 0 \vee -6x = -\tfrac{1}{2}a$$
$$x = 0 \vee x = \tfrac{1}{12}a$$

De maximale inhoud is
$I_{max} = -2\left(-\frac{1}{12}a\right)^3 + \frac{1}{4}a \cdot \left(-\frac{1}{12}a\right)^2 = -2 \cdot \frac{1}{1728}a^3 + \frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{144}a^2 = -\frac{2}{1728}a^3 + \frac{1}{576}a^3 = -\frac{2}{1728}a^3 + \frac{3}{1728}a^3 = \frac{1}{1728}a^3$.

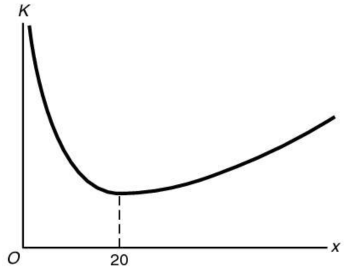
47 **a** $K = (2y + x) \cdot 70 + x \cdot 140 = 210x + 140y$

b $O = \text{lengte} \cdot \text{breedte} = x \cdot y$
$O = 600$ geeft $x \cdot y = 600$

$$\left.\begin{array}{l} K = 210x + 140y \\ xy = 600, \text{ dus } y = \dfrac{600}{x} \end{array}\right\} K = 210x + 140 \cdot \frac{600}{x} = 210x + \frac{84\,000}{x}$$

c $K = 210x + 84\,000x^{-1}$ geeft $\dfrac{dK}{dx} = 210 - 84\,000x^{-2}$

Los op $\dfrac{dK}{dx} = 0$.
Voer in $y_1 = 210 - 84\,000x^{-2}$.
De optie zero of ROOT geeft $x = 20$.



Uit de schets blijkt dat de kosten minimaal zijn voor $x = 20$.
$x = 20$ geeft $y = \dfrac{600}{20} = 30$
De kosten zijn minimaal als de afmetingen van het parkeerterrein 20 bij 30 meter zijn.

Bladzijde 84

48 **a** oppervlakte $= 2x^2 + 2xy$
oppervlakte $= 72$

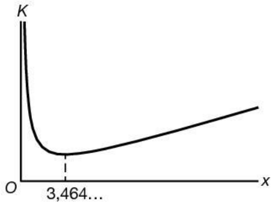
$$\left.\begin{array}{l}\text{oppervlakte} = 2x^2 + 2xy\\ \text{oppervlakte} = 72\end{array}\right\} \begin{array}{l}2x^2 + 2xy = 72\\ x^2 + xy = 36\\ xy = 36 - x^2\\ y = \dfrac{36}{x} - x\end{array}$$

13

b $K = y \cdot 50 + 2x \cdot 100 = 200x + 50y = 200x + 50 \cdot \left(\dfrac{36}{x} - x\right) = 200x + \dfrac{1800}{x} - 50x = 150x + \dfrac{1800}{x}$

c $K = 150x + \dfrac{1800}{x} = 150x + 1800x^{-1}$ geeft $\dfrac{dK}{dx} = 150 - 1800x^{-2}$

Los op $\dfrac{dK}{dx} = 0$.
Voer in $y_1 = 150 - 1800x^{-2}$.
De optie zero of ROOT geeft $x = 3{,}464...$



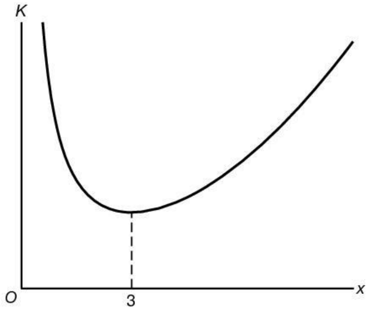
Uit de schets blijkt dat de kosten minimaal zijn voor $x = 3{,}464...$
$x = 3{,}464...$ geeft $y = \dfrac{36}{3{,}464...} - 3{,}464... \approx 6{,}93$
De afmetingen zijn 3,46 bij 3,46 bij 6,93 meter.

49 **a** K = kosten bodem + kosten zijkanten
Stel de hoogte is h dm.

$$\left.\begin{array}{l}K = x \cdot 2x \cdot 0{,}4 + (2 \cdot xh + 2 \cdot 2xh) \cdot 0{,}2 = 0{,}8x^2 + 1{,}2xh\\ \left.\begin{array}{l}I = x \cdot 2x \cdot h = 2x^2h\\ I = 72\end{array}\right\} 2x^2h = 72, \text{ dus } h = \dfrac{72}{2x^2} = \dfrac{36}{x^2}\end{array}\right\} \begin{array}{l}K = 0{,}8x^2 + 1{,}2x \cdot \dfrac{36}{x^2}\\ K = 0{,}8x^2 + \dfrac{43{,}2}{x}\\ K = 0{,}8x^2 + \dfrac{216}{5x}\end{array}$$

b $K = 0{,}8x^2 + \dfrac{43{,}2}{x} = 0{,}8x^2 + 43{,}2x^{-1}$ geeft $\dfrac{dK}{dx} = 1{,}6x - 43{,}2x^{-2}$

Los op $\dfrac{dK}{dx} = 0$.
Voer in $y_1 = 1{,}6x - 43{,}2x^{-2}$.
De optie zero of ROOT geeft $x = 3$.



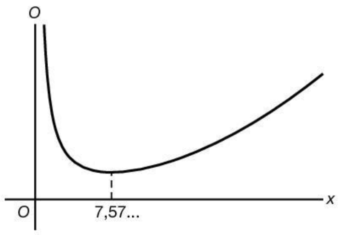
Uit de schets blijkt dat de kosten minimaal zijn voor $x = 3$.
$x = 3$ geeft $h = \dfrac{36}{3^2} = 4$
Dus K is minimaal bij de afmetingen 3 bij 6 bij 4 dm.

© Noordhoff Uitgevers bv

50 a De breedte van de uitslag is $4x + 0{,}7$ cm.
De hoogte van de uitslag is $h + 0{,}5x + 0{,}6x + 2 \cdot 0{,}7 = 1{,}4 + 1{,}1x + h$ cm.
$\left.\begin{array}{l} I = x^2h \\ I = 1000 \text{ cm}^3 \end{array}\right\} x^2h = 1000$, dus $h = \dfrac{1000}{x^2}$
Dus $O(x) = (4x + 0{,}7)(1{,}4 + 1{,}1x + h)$
$= (4x + 0{,}7)\left(1{,}4 + 1{,}1x + \dfrac{1000}{x^2}\right)$

b $O(x) = (4x + 0{,}7)\left(1{,}4 + 1{,}1x + \dfrac{1000}{x^2}\right) = 5{,}6x + 4{,}4x^2 + \dfrac{4000}{x} + 0{,}98 + 0{,}77x + \dfrac{700}{x^2}$
$= 4{,}4x^2 + 6{,}37x + 0{,}98 + 4000x^{-1} + 700x^{-2}$ geeft
$O'(x) = 8{,}8x + 6{,}37 - 4000x^{-2} - 1400x^{-3} = 8{,}8x + 6{,}37 - \dfrac{4000}{x^2} - \dfrac{1400}{x^3}$

c Los op $O'(x) = 0$.
Voer in $y_1 = 8{,}8x + 6{,}37 - \dfrac{4000}{x^2} - \dfrac{1400}{x^3}$.
De optie zero of ROOT geeft $x = 7{,}57...$



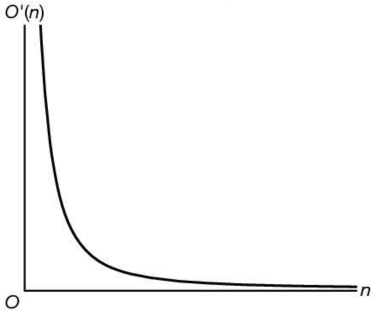
Uit de schets blijkt dat de oppervlakte minimaal is voor $x = 7{,}57...$
O(7,57...) ≈ 842, dus er wordt 842 cm^2 karton gebruikt.

Bladzijde 85

51 a Als n heel groot is, dan is $5 + 0{,}1n$ heel groot, dus dan is $\dfrac{150\,000}{5 + 0{,}1n} \approx 0$ en $O(n) \approx 30\,000 - 0 = 30\,000$.
De dagomzet zal altijd minder dan 30 000 euro zijn.

b Als n toeneemt, neemt $0{,}1n$ toe en neemt $5 + 0{,}1n$ toe. Dus neemt $\dfrac{150\,000}{5 + 0{,}1n}$ af en neemt
$30\,000 - \dfrac{150\,000}{5 + 0{,}1n}$ toe. De grafiek van O is dus stijgend.

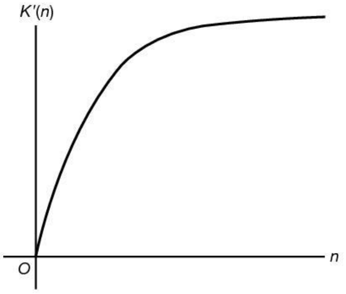
c $O(n) = 30\,000 - \dfrac{150\,000}{5 + 0{,}1n}$ geeft $O'(n) = -\dfrac{(5 + 0{,}1n) \cdot 0 - 150\,000 \cdot 0{,}1}{(5 + 0{,}1n)^2} = \dfrac{15\,000}{(5 + 0{,}1n)^2}$



De grafiek van $O'(n)$ ligt geheel boven de n-as, dus de grafiek van O is stijgend.
De grafiek van $O'(n)$ is dalend, dus de grafiek van O is afnemend stijgend.

d De totale dagomzet is $O(2000) \approx 29\,268$ euro.
20% van 2000 is 400, dus bij de 20% best verkopende artikelen hoort $n = 400$.
$O(400) \approx 26\,667$
Dus $\dfrac{26\,667}{29\,268} \times 100\% \approx 91{,}1\%$ van de dagomzet wordt opgebracht door de 20% best verkopende artikelen.
40% van 2000 is 800 en $O(800) \approx 28\,235$.
De 60% slechtst verkopende artikelen brengen dus $29\,268 - 28\,235 = 1033$ euro op.
Dus $\dfrac{1033}{29\,268} \times 100\% \approx 3{,}5\%$ van de dagomzet wordt opgebracht door de 60% slechtst verkopende artikelen.

e $K(n) = 8n^{1,05}$ geeft $K'(n) = 8,4n^{0,05}$



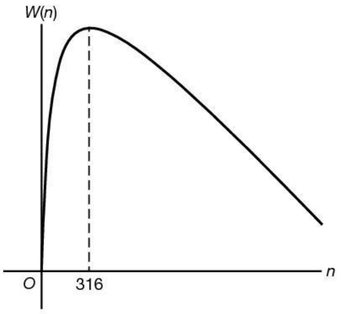
De grafiek van $K'(n)$ ligt boven de n-as, dus de grafiek van K is stijgend.
De grafiek van $K'(n)$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van K is toenemend stijgend.

f $W(n) = O(n) - K(n) = 30\,000 - \dfrac{150\,000}{5 + 0,1n} - 8n^{1,05}$ geeft $W'(n) = \dfrac{15\,000}{(5 + 0,1n)^2} - 8,4n^{0,05}$

Los op $W'(n) = 0$.

Voer in $y_1 = \dfrac{15\,000}{(5 + 0,1x)^2} - 8,4x^{0,05}$.

De optie zero of ROOT geeft $x \approx 316$.



Uit de schets blijkt dat de winst maximaal is voor $n = 316$.
De winst is dus maximaal bij verkoop van de 316 best verkochte artikelen.

g $W(n) = 30000 - \dfrac{150000}{5 + 0,1n} - 8n^{1,05} = \dfrac{30000(5 + 0,1n)}{5 + 0,1n} - \dfrac{150000}{5 + 0,1n} - \dfrac{8n^{1,05} \cdot (5 + 0,1n)}{5 + 0,1n}$

$= \dfrac{150\,000 + 3000n - 150\,000 - 40n^{1,05} - 0,8n^{2,05}}{5 + 0,1n} = \dfrac{3000n - 40n^{1,05} - 0,8n^{2,05}}{5 + 0,1n}$

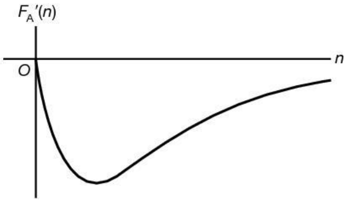
Dus $a = 3000$, $b = -40$ en $c = -0,8$.

Bladzijde 86

52 **a** $n_{50} = 625$ geeft

$F_A = 1 - \dfrac{1}{\left(\dfrac{625}{n}\right)^{1,75} + 1} = 1 - \dfrac{1}{\dfrac{78\,125}{n^{1,75}} + 1} = 1 - \dfrac{n^{1,75}}{78\,125 + n^{1,75}} = \dfrac{78\,125 + n^{1,75}}{78\,125 + n^{1,75}} - \dfrac{n^{1,75}}{78\,125 + n^{1,75}} = \dfrac{78\,125}{78\,125 + n^{1,75}}$

b $F_A(n) = \dfrac{78\,125}{78\,125 + n^{1,75}}$ geeft $F_A'(n) = \dfrac{(78\,125 + n^{1,75}) \cdot 0 - 78\,125 \cdot 1,75n^{0,75}}{(78\,125 + n^{1,75})^2} = \dfrac{-136\,718,75n^{0,75}}{(78\,125 + n^{1,75})^2}$



De grafiek van $F_A'(n)$ ligt onder de n-as, dus de grafiek van F_A is dalend.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $F_A(100) = \dfrac{78125}{78125 + 100^{1,75}} = 0{,}961...$

Dus $(1 - 0{,}961...) \cdot 180\,000 \approx 7002$ boeken.

d Er geldt $F(256) = 0{,}75$.

Los op $1 - \dfrac{1}{\left(\dfrac{n_{50}}{256}\right)^{1,75} + 1} = 0{,}75$.

Voer in $y_1 = 1 - \dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{256}\right)^{1,75} + 1}$ en $y_2 = 0{,}75$.

Intersect geeft $x \approx 480$.

Dus de 480 best lopende titels zijn goed voor de helft van de verkoop bij Bol.com.

Bladzijde 87

53 **a** $K_{bodem} = 24x^2$

b $K_{zijkanten} = 4 \cdot xy \cdot 18 = 72xy$

c $K_{bodem} + K_{zijkanten} = 288$

$24x^2 + 72xy = 288$

$72xy = 288 - 24x^2$

$y = \dfrac{288 - 24x^2}{72x} = \dfrac{12 - x^2}{3x}$

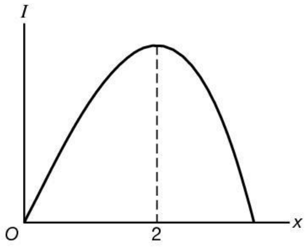
d $I = x \cdot x \cdot y = x^2 \cdot \dfrac{12 - x^2}{3x} = \dfrac{x^2(12 - x^2)}{3x} = \dfrac{12x^2 - x^4}{3x} = 4x - \frac{1}{3}x^3$

e $I = 4x - \frac{1}{3}x^3$ geeft $\dfrac{dI}{dx} = 4 - x^2$

$\dfrac{dI}{dx} = 0$ geeft $4 - x^2 = 0$

$x^2 = 4$

$x = 2$



Uit de schets blijkt dat I maximaal is als $x = 2$.

$x = 2$ geeft $y = \dfrac{12 - 2^2}{3 \cdot 2} = 1\frac{1}{3}$ en $I_{max} = 4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 = 5\frac{1}{3}$.

De afmetingen zijn $2 \times 2 \times 1\frac{1}{3}$ m en de maximale inhoud is $5\frac{1}{3}$ m^3.

f Er geldt dan $24x^2 + 72xy = a$

$72xy = a - 24x^2$

$y = \dfrac{a - 24x^2}{72x}$

$I = x^2y = x^2 \cdot \dfrac{a - 24x^2}{72x} = \dfrac{x^2(a - 24x^2)}{72x} = \dfrac{ax^2 - 24x^4}{72x} = \frac{1}{72}ax - \frac{1}{3}x^3$

g $I = \frac{1}{72}ax - \frac{1}{3}x^3$ geeft $\dfrac{dI}{dx} = \frac{1}{72}a - x^2$

$\dfrac{dI}{dx} = 0$ geeft $\frac{1}{72}a - x^2 = 0$

$x^2 = \frac{1}{72}a$

$x = \sqrt{\frac{1}{72}a}$

Dus de inhoud is maximaal voor $x = \sqrt{\frac{1}{72}a}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

54 **a** $R = p \cdot q = (1560 - a\sqrt{q}) \cdot q = 1560q - aq\sqrt{q} = 1560q - aq^{1,5}$ geeft

$\frac{dR}{dq} = 1560 - 1,5aq^{0,5} = 1560 - 1,5a\sqrt{q}$

$\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=169} = 0$ geeft $1560 - 1,5a\sqrt{169} = 0$

$1560 - 1,5a \cdot 13 = 0$

$19,5a = 1560$

$a = 80$

Dus $a = 80$.

b $W = R - K = 1560q - 92q^{1,5} - (250 + bq) = 1560q - 92q^{1,5} - 250 - bq$

$\frac{dW}{dq} = 1560 - 138q^{0,5} - b$

$p = 548$ geeft $1560 - 92\sqrt{q} = 548$

$-92\sqrt{q} = -1012$

$\sqrt{q} = 11$

$q = 121$

$\left[\frac{dW}{dq}\right]_{q=121} = 0$ geeft $1560 - 138 \cdot 121^{0,5} - b = 0$

$1560 - 138 \cdot 11 - b = 0$

$1560 - 1580 - b = 0$

$b = 42$

Dus $b = 42$.

c $W = 1560q - 150q^{1,5} - 250 - bq$

$\frac{dW}{dq} = 1560 - 225q^{0,5} - b$

$\frac{dW}{dq} = 0$ geeft $1560 - 225q^{0,5} - b = 0$

$225\sqrt{q} = 1560 - b$

$\sqrt{q} = 6\frac{14}{15} - \frac{1}{225}b$

Hierbij hoort een prijs van $p = 1560 - 150 \cdot (6\frac{14}{15} - \frac{1}{225}b) = 520 + \frac{2}{3}b$.

Bladzijde 88

55 **a** In ΔAEP geldt $EP^2 = AP^2 + AE^2$

$EP^2 = x^2 + 200^2 = x^2 + 40\,000$

$EP = \sqrt{x^2 + 40\,000}$

$FP = 2000 - x$

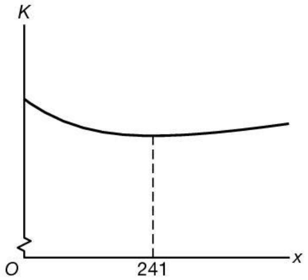
Voor K geldt dan $K = 65\sqrt{x^2 + 40\,000} + 50(2000 - x) = 65\sqrt{x^2 + 40\,000} - 50x + 100\,000$.

b $K = 65\sqrt{x^2 + 40\,000} - 50x + 100\,000$ geeft $\frac{dK}{dx} = 65 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 40\,000}} \cdot 2x - 50 = \frac{65x}{\sqrt{x^2 + 40\,000}} - 50$

Los op $\frac{dK}{dx} = 0$.

Voer in $y_1 = \frac{65x}{\sqrt{x^2 + 40\,000}} - 50$.

De optie zero of ROOT geeft $x \approx 241$.



Uit de schets blijkt dat de kosten minimaal zijn als $x = 241$.
Dus $AP = 241$ meter.

© Noordhoff Uitgevers bv

Diagnostische toets

Bladzijde 90

1 a $y = e^{x^2+3}$ geeft $\frac{dy}{dx} = e^{x^2+3} \cdot 2x = 2x e^{x^2+3}$

b $y = \ln(3x+5) + x^3$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x+5} \cdot 3 + 3x^2 = \frac{3}{3x+5} + 3x^2$

c $y = 50 \cdot {}^3\log(x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 50 \cdot \frac{1}{x\ln(3)} = \frac{50}{x\ln(3)}$

d $y = x^2 \cdot \ln(x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x\ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$

e $N(t) = \frac{250t}{\ln(0{,}5t+2)}$ geeft

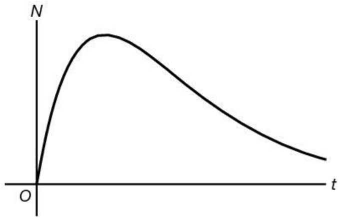
$$N'(t) = \frac{\ln(0{,}5t+2) \cdot 250 - 250t \cdot \frac{1}{0{,}5t+2} \cdot 0{,}5}{(\ln(0{,}5t+2))^2} = \frac{250\ln(0{,}5t+2) - \frac{125t}{0{,}5t+2}}{(\ln(0{,}5t+2))^2} = \frac{250(0{,}5t+2)\ln(0{,}5t+2) - 125t}{(0{,}5t+2)(\ln(0{,}5t+2))^2}$$

f $K(q) = q^{1{,}3} \cdot e^{3-2q}$ geeft $K'(q) = 1{,}3q^{0{,}3} \cdot e^{3-2q} + q^{1{,}3} \cdot e^{3-2q} \cdot -2 = 1{,}3q^{0{,}3} \cdot e^{3-2q} - 2q^{1{,}3} \cdot e^{3-2q}$

g $R(p) = 5^p + p^5 - 5 \cdot \ln(p)$ geeft $R'(p) = 5^p \cdot \ln(5) + 5p^4 - 5 \cdot \frac{1}{p} = 5^p \cdot \ln(5) + 5p^4 - \frac{5}{p}$

h $F(t) = \frac{e^{2t+1}}{3t+2}$ geeft $F'(t) = \frac{(3t+2) \cdot e^{2t+1} \cdot 2 - e^{2t+1} \cdot 3}{(3t+2)^2} = \frac{(6t+4)e^{2t+1} - 3e^{2t+1}}{(3t+2)^2} = \frac{(6t+1)e^{2t+1}}{(3t+2)^2}$

2 a Voer in $y_1 = 2x \cdot e^{-0{,}2x+2}$.



b $N(t) = 2t \cdot e^{-0{,}2t+2}$ geeft $N'(t) = 2e^{-0{,}2t+2} + 2t \cdot e^{-0{,}2t+2} \cdot -0{,}2 = 2e^{-0{,}2t+2} - 0{,}4te^{-0{,}2t+2}$
De snelheid is $N'(4) = 2e^{-0{,}2 \cdot 4+2} - 0{,}4 \cdot 4e^{-0{,}2 \cdot 4+2} \approx 1{,}3$.

c $N'(15) = 2e^{-0{,}2 \cdot 15+2} - 0{,}4 \cdot 15e^{-0{,}2 \cdot 15+2} \approx -1{,}5$
$N'(15) < 0$, dus de grafiek van N daalt voor $t = 15$.

d Los op $N'(t) = -2$.
Voer in $y_1 = 2e^{-0{,}2x+2} - 0{,}4xe^{-0{,}2x+2}$ en $y_2 = -2$.
Intersect geeft $x = 10$.
$t = 10$ geeft $N = 2 \cdot 10e^{-0{,}2 \cdot 10+2} = 20$
Dus $A(10, 20)$.

e Los op $N'(t) = 0$. De optie zero of ROOT geeft $x = 5$.
$t = 5$ geeft $N = 2 \cdot 5e^{-0{,}2 \cdot 5+2} \approx 27{,}2$
Uit de schets van vraag a volgt dat het maximum van N gelijk is aan 27,2.

3 a $y = \frac{50}{(3x+4)^2}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(3x+4)^2 \cdot 0 - 50 \cdot 2(3x+4) \cdot 3}{(3x+4)^4} = \frac{-300(3x+4)}{(3x+4)^4} = \frac{-300}{(3x+4)^3}$

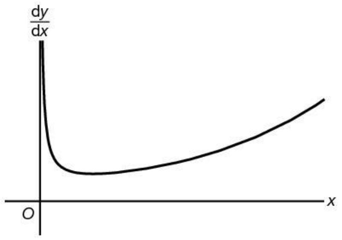
De teller -300 is negatief en de noemer $(3x+4)^3$ is positief voor $x \geq 0$. Dus $\frac{-300}{(3x+4)^3}$ is negatief voor $x \geq 0$. De grafiek van y is dus dalend voor $x \geq 0$.

b Als x toeneemt, neemt $3x + 4$ toe en dan neemt $(3x+4)^2$ toe. Dus dan neemt $\frac{50}{(3x+4)^2}$ af. De grafiek van y is dus dalend.

c Los op $\frac{dy}{dx} = -0{,}3$.
Voer in $y_1 = \frac{-300}{(3x+4)^3}$ en $y_2 = -0{,}3$.
Intersect geeft $x = 5$.
Dus voor $x = 5$ is de snelheid waarmee y verandert gelijk aan $-0{,}3$.

4 **a** $y = 0{,}2 \cdot \ln(x) + e^{0{,}2x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 0{,}2 \cdot \frac{1}{x} + e^{0{,}2x} \cdot 0{,}2 = \frac{0{,}2}{x} + 0{,}2\,e^{0{,}2x}$

Voer in $y_1 = \frac{0{,}2}{x} + 0{,}2\,e^{0{,}2x}$.



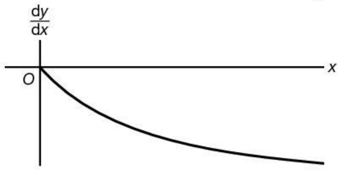
De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x-as, dus de grafiek van y is stijgend.

b De optie minimum geeft $x \approx 1{,}86$.
Dus voor $x = 1{,}86$ is de snelheid waarmee y toeneemt minimaal.

Bladzijde 91

5 **a** Als x toeneemt, dan neemt $x + 6$ toe en ook x^2 neemt toe. Maar x^2 neemt meer toe dan $x + 6$, dus $\frac{x^2}{x+6}$ neemt toe en dus neemt $5 - \frac{x^2}{x+6}$ af. De grafiek van y is dus dalend.

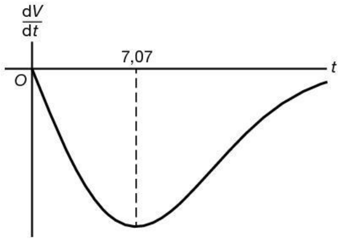
b $y = 5 - \frac{x^2}{x+6}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -\frac{(x+6) \cdot 2x - x^2 \cdot 1}{(x+6)^2} = -\frac{2x^2 + 12x - x^2}{(x+6)^2} = \frac{-x^2 - 12x}{(x+6)^2}$



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt onder de x-as, dus de grafiek van y is dalend.
De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is toenemend dalend.

6 **a** Los op $100\,e^{-0{,}01t^2} = 50$.
Voer in $y_1 = 100\,e^{-0{,}01x^2}$ en $y_2 = 50$.
Intersect geeft $x \approx 8{,}33$.
Dus na ongeveer 8,33 seconden is de helft van de inhoud weggestroomd.

b $V = 100\,e^{-0{,}01t^2}$ geeft $\frac{dV}{dt} = 100\,e^{-0{,}01t^2} \cdot -0{,}02t = -2t\,e^{-0{,}01t^2}$
Voer in $y_1 = -2x\,e^{-0{,}01x^2}$.
De optie minimum geeft $x \approx 7{,}07$.



Uit de schets blijkt dat de uitstroomsnelheid maximaal is voor $t = 7{,}07$.

7 **a** lengte $= 4 \cdot 2x + 4 \cdot (x + 1) + 4h$
lengte $= 8x + 4x + 4 + 4h$

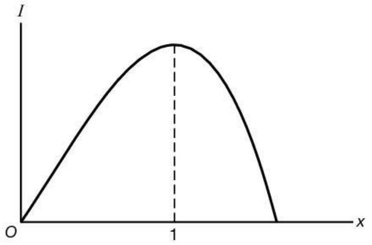
$$\left.\begin{array}{l} \text{lengte} = 12x + 4 + 4h \\ \text{lengte} = 24 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 12x + 4 + 4h = 24 \\ 4h = -12x + 20 \\ h = -3x + 5 \end{array}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\left.\begin{array}{l} I = 2x \cdot (x+1) \cdot h \\ h = -3x + 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} I = 2x \cdot (x+1) \cdot (-3x+5) \\ I = 2x \cdot (-3x^2 + 2x + 5) \\ I = -6x^3 + 4x^2 + 10x \end{array}$

c $I = -6x^3 + 4x^2 + 10x$ geeft $\frac{dI}{dx} = -18x^2 + 8x + 10$

$x = 1$ geeft $\frac{dI}{dx} = -18 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 10 = 0$



Uit de schets blijkt dat I maximaal is voor $x = 1$.

8 Stel de breedte is x cm en de lengte is $3x$ cm.
Stel de hoogte is h cm.
H is de benodigde hoeveelheid materiaal in cm^2.

$H = 3x \cdot x + 2 \cdot xh + 2 \cdot 3xh$

$H = 3x^2 + 8xh$

3 liter = 3 dm^3 = 3000 cm^3

$\left.\begin{array}{l} I = 3x^2h \\ I = 3000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x^2h = 3000 \\ h = \frac{3000}{3x^2} = \frac{1000}{x^2} \end{array}$

$H = 3x^2 + 8x \cdot \frac{1000}{x^2} = 3x^2 + \frac{8000x}{x^2} = 3x^2 + \frac{8000}{x}$

$H = 3x^2 + 8000x^{-1}$ geeft $\frac{dH}{dx} = 6x - 8000x^{-2} = 6x - \frac{8000}{x^2}$

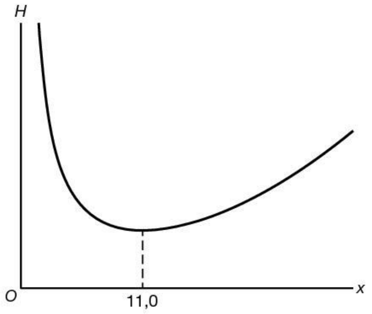
$\frac{dH}{dx} = 0$ geeft $6x - \frac{8000}{x^2} = 0$

$6x = \frac{8000}{x^2}$

$6x^3 = 8000$

$x^3 = 1333\frac{1}{3}$

$x \approx 11{,}0$



Uit de schets volgt dat H minimaal is voor $x = 11{,}0$.

$x = 11{,}0$ geeft $h = \frac{1000}{11{,}0^2} \approx 8{,}3$

De afmetingen zijn dus breedte = 11,0 cm, lengte = 33,0 cm en hoogte = 8,3 cm.

13

13

9 Voor de materiaalkosten K geldt K = kosten zijkanten + kosten bodem.

$K = 2xh \cdot 6{,}25 + 2 \cdot 1\frac{1}{2}xh \cdot 6{,}25 + x \cdot 1\frac{1}{2}x \cdot B$

$K = 12{,}5xh + 18{,}75xh + 1\frac{1}{2}Bx^2$

$K = 31{,}25xh + 1\frac{1}{2}Bx^2$

$$\left.\begin{array}{l} I = x \cdot 1\frac{1}{2}x \cdot h = 1\frac{1}{2}x^2h \\ I = 18 \end{array}\right\} \; 1\frac{1}{2}x^2h = 18$$

$$h = \frac{18}{1\frac{1}{2}x^2} = \frac{12}{x^2}$$

Dus $K = 31{,}25x \cdot \frac{12}{x^2} + 1\frac{1}{2}Bx^2 = \frac{375}{x} + 1\frac{1}{2}Bx^2$.

$K = 375x^{-1} + 1\frac{1}{2}Bx^2$ geeft $\frac{dK}{dx} = -375x^{-2} + 3Bx = \frac{-375}{x^2} + 3Bx$

$\frac{dK}{dx} = 0$ geeft $\frac{-375}{x^2} + 3Bx = 0$

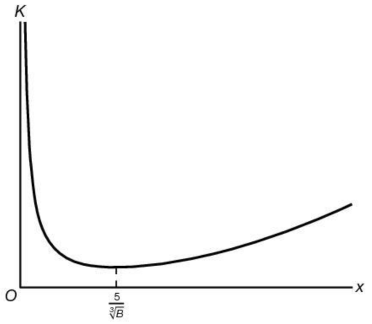
$$3Bx = \frac{375}{x^2}$$

$$3Bx^3 = 375$$

$$x^3 = \frac{125}{B}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{125}{B}} = \frac{5}{\sqrt[3]{B}}$$

Voor elke $B > 0$ heeft de grafiek van K de volgende vorm.



De grafiek van K heeft dus een minimum voor $x = \frac{5}{\sqrt[3]{B}}$.

© Noordhoff Uitgevers bv